Über die vektoriell-skalaren Gleichungen der astronomischen Störungstheorie

Von PETER MUSEN

(Z. Naturforschg. **2a**, 365—369 [1947]; eingegangen am 15. Februar 1947)

Die Störungen der vektoriell-skalaren Elemente für die Planetenbewegung werden behandelt. Den Ausgangspunkt der Arbeit bilden die Oskulationsbedingungen, welche in passender, vektorieller Form zugrunde gelegt sind. Aus den Oskulationsbedingungen können, mit Hilfe der Operatorenrechnung, die vektoriell-skalaren Gleichungen von Milankowitsch kurz abgeleitet werden.

In dieser Arbeit wird die Frage über die Störungen der vektoriell-skalaren Elemente von Milankowitsch für die Planetenbewegung betrachtet. Diese Elemente sind: die doppelte Flächengeschwindigkeit $\mathfrak{C} = C_1 \mathfrak{i} + C_2 \mathfrak{j} + C_3 \mathfrak{k}$, und der Vektor $\mathfrak{D} = D_1 \mathfrak{i} + D_2 \mathfrak{j} + D_3 \mathfrak{k}$, welcher zum Perihel gerichtet ist, und der Moment τ des Periheldurchganges (wobei $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ die unveränderlichen Einheitsvektoren sind, welche zueinander senkrecht stehen).

Die Beträge der Vektoren $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ sind

$$|\mathfrak{C}| = C = \sqrt{f(M+m)p}\,, \quad |\mathfrak{D}| = D = f(M+m)e,$$

wobei p den Parameter, e die Exzentrizität der oskulierenden Bahn, M und m die Massen der Sonne und des Planeten, f die Gravitationskonstante bedeuten. Die entsprechenden Einheitsvektoren werden wir mit $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{D}_0$ bezeichnen. $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ sind nicht voneinander unabhängig, sondern wegen der Normalität von $\mathfrak{C}$ zur Bahnebene muß

$$(\mathfrak{C}, \mathfrak{D}) = 0 \tag{1}$$

sein, d. h. die vektoriell-skalaren Elemente liefern uns nur sechs unabhängige skalare Elemente, aber nach Einführung dieser Elemente, anstatt gewöhnlicher astronomischer, gewinnen die Gleichungen der Störungstheorie an Symmetrie sowie an Einfachheit, und außerdem bekommt man ein klares, kinematisches Bild der gestörten Bewegung.

Milankowitsch[1] hat seine Gleichungen nicht für die Vektoren $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ direkt, sondern für die Komponenten dieser Vektoren erhalten. Er hat dabei die kombinierte vektoriell-skalare Methode und die Eigenschaften der runden und eckigen Lagrangeschen Klammern benutzt.

Bilimowitsch[2] hat die Gleichungen von Milankowitsch aus den Eigenschaften der Pfaffschen Gleichungen abgeleitet.

In dieser Arbeit schlage ich zur Lösung der Aufgabe eine verhältnismäßig elementare Methode vor. Die Eigenschaften der Lagrangeschen Klammern folgen aus den Oskulationsbedingungen. Um die mühsamen Berechnungen zu vereinfachen, wird den Oskulationsbedingungen eine besonders angepaßte konzise Form gegeben, so daß man die Gleichungen von Milankowitsch als eine einfache algebraische Kombination der Oskulationsbedingungen, des Laplaceschen Integrals und des Flächenintegrals erhält.

1. Einige Sätze aus der Operatorenrechnung

Es sei φ eine Funktion des Skalars t und der Vektoren

$$\mathfrak{a}_k = A_{k1}\mathfrak{i} + A_{k2}\mathfrak{j} + A_{k3}\mathfrak{k} \quad (k = 1, 2, .., n).$$

Wir führen nach Bilimowitsch den partiellen, nach $\mathfrak{a}_k$ genommenen Gradienten von φ ein:

$$\operatorname{grad}_k \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial A_{k1}}\mathfrak{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial A_{k2}}\mathfrak{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial A_{k3}}\mathfrak{k}\,.$$

$\operatorname{grad}_k \varphi$ ist das Produkt der Funktion φ mit dem Differentialoperator:

$$\nabla_k = \frac{\partial}{\partial A_{k1}}\mathfrak{i} + \frac{\partial}{\partial A_{k2}}\mathfrak{j} + \frac{\partial}{\partial A_{k3}}\mathfrak{k}\,,$$

$$\operatorname{grad}_k \varphi = \nabla_k \cdot \varphi\,.$$

[1] Milankowitsch, Bull. Acad. Math. Natur. (A) Sc. Math. Phys. Nr. 6, Belgrad 1939.

[2] Bilimowitsch, Astronom. Nachr. **273**, Heft 4, S. 161.

Es gelten die folgenden Formeln:

$$\nabla_k |\mathfrak{a}_k| = \mathfrak{a}_{0k}, \tag{2}$$

wobei $\mathfrak{a}_{0k}$ den entsprechenden Einheitsvektor bedeutet;

$$(\mathfrak{g}, \nabla_k)\, \mathfrak{a}_k = \mathfrak{g}, \tag{3}$$

$$(\mathfrak{g}, \nabla_k)\, \varphi(|\mathfrak{a}_k|) = \varphi'(|\mathfrak{a}_k|)\,(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_{0k}), \tag{4}$$

und, wenn $\mathfrak{g} = \text{const}$, dann ist

$$\nabla_k (\mathfrak{a}_k, \mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, \tag{5}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + T \cdot \varphi, \tag{6}$$

wobei T der Differentialoperator

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d\mathfrak{a}_k}{dt}, \nabla_k \right)$$

ist.

Falls φ die Funktion von $\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}$,

$$\varphi = \varphi(\mathfrak{r}),$$

ist, haben wir

$$\nabla \varphi = \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathfrak{k}.$$

Endlich soll der Ausdruck

$$\nabla_k (\mathfrak{r}, \mathfrak{g})_{\mathfrak{r}}$$

bei uns bedeuten, daß der Operator ∇_k nur auf $\mathfrak{r}$ angewendet werden soll. Man erhält dann leicht:

$$\left.\begin{aligned} \nabla_k (\mathfrak{r}, \operatorname{grad} \varphi)_{\mathfrak{r}} &= \operatorname{grad}_k \varphi, \\ [\mathfrak{g}, \nabla_k]\, (\mathfrak{r}, \operatorname{grad} \varphi)_{\mathfrak{r}} &= [\mathfrak{g}, \operatorname{grad}_k \varphi] \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

2. Die Integrale des Zweikörperproblems in der vektoriellen Form. Oskulationsbedingungen

Die Differentialgleichung der ungestörten Planetenbewegung lautet bekantlich:

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = -\frac{\mu\, \mathfrak{r}}{r^3}, \qquad \begin{aligned} \mu &= f(M+m), \\ r &= |\mathfrak{r}|, \end{aligned}$$

wobei $\mathfrak{r}$ den Ortsvektor des Planeten in bezug auf die Sonne bedeutet. Diese Gleichung hat die folgenden Integrale, welche wir in der vektoriellen Form schreiben:

das Flächenintegral

$$\left[\mathfrak{r}, \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right] = \mathfrak{C}; \tag{8}$$

das Hamiltonsche Integral

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{1}{C^2}\,[\mathfrak{C}, \mathfrak{D} + \mu\, \mathfrak{r}_0]; \tag{9}$$

das Laplacesche Integral

$$\left[\mathfrak{C}, \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right] + \mu\, \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{D} = 0, \tag{10}$$

wo $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}/r$; das Integral der lebendigen Kraft

$$v^2 = |\mathfrak{v}|^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu^2 - D^2}{C^2}. \tag{11}$$

Die Gleichung der Bahn lautet

$$r = \frac{C^2}{\mu + D \cos w}, \tag{12}$$

wobei w die wahre Anomalie bedeutet.

Das Keplersche Integral, in der Form zweier Gleichungen, schreibt sich als

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{C^2}{\mu^2 - D^2}\,(\mu - D\cos E), \\ \mu E - D \sin E &= \frac{\mu^2 - D^2}{C^3}\,(t - \tau). \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Darin bedeutet E die exzentrische Anomalie.

Das Flächen-, das Laplacesche und das Keplersche Integral liefern insgesamt sechs unabhängige skalare Integrale, mittels welcher das Problem der ungestörten Bewegung vollkommen gelöst ist.

Alle übrigen Integrale können als Folgerungen der vorhergenannten Integrale betrachtet werden.

Der Ortsvektor $\mathfrak{r}$ ist durch die Gleichung

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{D}_0\, r \cos w + [\mathfrak{C}_0, \mathfrak{D}_0]\, r \sin w, \tag{14}$$

$$\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{D}}{D}\, r \cos w + \frac{[\mathfrak{C}, \mathfrak{D}]}{C D}\, r \sin w \tag{15}$$

gegeben. — Die Differentialgleichung der gestörten Planetenbewegung lautet:

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = -\frac{\mu\, \mathfrak{r}}{r^3} + \operatorname{grad} R, \tag{16}$$

wobei R die Störungsfunktion ist. Die Gln. (8) bis (15) gelten auch für die gestörte Bewegung, wenn wir unter den $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ die Oskulationselemente verstehen. Die Oskulationsbedingungen können wir als Konstanten-Variationsgleichungen in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t} = \mathfrak{v}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = -\frac{\mu\, \mathfrak{r}}{r^3}. \tag{17}$$

Indem wir bemerken, daß die Zeit t explizit nur mittels des Keplerschen Integrals (13) in der Kombination $t-\tau$ eintritt, können wir die Oskulationsbedingungen auch so schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \tau} &= -\mathfrak{v}\,, \\ \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \tau} &= +\frac{\mu\,\mathfrak{r}}{r^3}\,. \end{aligned} \tag{17'}$$

Nun ist aber unter Berücksichtigung von (6) und (16)

$$\begin{aligned} \mathfrak{v} &= \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{\partial r}{\partial t} + T\cdot\mathfrak{r} + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}\,, \\ \frac{d\mathfrak{v}}{dt} &= \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + T\cdot\mathfrak{v} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \tau}\cdot\frac{d\tau}{dt} \\ &= -\frac{\mu\,\mathfrak{r}}{r^3} + \operatorname{grad} R\,, \end{aligned}$$

wobei:

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{d\mathfrak{C}}{dt}\,,\nabla_{\mathfrak{C}}\right) + \left(\frac{d\mathfrak{D}}{dt}\,,\nabla_{\mathfrak{D}}\right), \\ \nabla_{\mathfrak{C}} &= \frac{\partial}{\partial C_1}\mathfrak{i} + \frac{\partial}{\partial C_2}\mathfrak{j} + \frac{\partial}{\partial C_3}\mathfrak{k}\,, \\ \nabla_{\mathfrak{D}} &= \frac{\partial}{\partial D_1}\mathfrak{i} + \frac{\partial}{\partial D_2}\mathfrak{j} + \frac{\partial}{\partial D_3}\mathfrak{k}\,. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von (17) und (17′) lauten die Oskulationsbedingungen somit schließlich:

$$\begin{aligned} T\cdot\mathfrak{r} - \mathfrak{v}\cdot\frac{d\tau}{dt} &= 0\,, \\ T\cdot\mathfrak{v} + \frac{\mu\,\mathfrak{r}}{r^3}\cdot\frac{d\tau}{dt} &= \operatorname{grad} R\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Diese Form der Oskulationsbedingungen ermöglicht es uns, ohne Hilfe der Lagrangeschen Klammern die vektoriell-skalaren Gleichungen der Störungstheorie aufzustellen.

3. Die Aufstellung der vektoriell-skalaren Gleichungen der Störungstheorie

Multiplizieren wir die erste der Gln. (18) skalar mit $-(\mathfrak{D},\nabla_{\mathfrak{D}})\,\mathfrak{v}$ und die zweite mit $+(\mathfrak{D},\nabla_{\mathfrak{D}})\,\mathfrak{r}$ und addieren wir die Resultate, so bekommen wir

$$P + Q\,\frac{d\tau}{dt} = (\mathfrak{D}\,,\operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} R)\,, \tag{19}$$

wobei $\operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} R$ den partiellen, nach $\mathfrak{D}$ genommenen Gradienten bedeutet und

$$\begin{aligned} P &= (\mathfrak{D}\,,\nabla_{\mathfrak{D}})\,\mathfrak{r}\cdot T\mathfrak{v} - (\mathfrak{D}\,,\nabla_{\mathfrak{D}})\,\mathfrak{v}\cdot T\mathfrak{r}\,, \\ Q &= \frac{\mu\,\mathfrak{r}}{r^3}\cdot(\mathfrak{D}\,,\nabla_{\mathfrak{D}})\,\mathfrak{r} + \mathfrak{v}\,(\mathfrak{D}\,,\nabla_{\mathfrak{D}})\,\mathfrak{v}\,. \end{aligned} \tag{19'}$$

Nun differenzieren wir P partiell nach t:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= (\mathfrak{D}\,,\nabla_{\mathfrak{D}})\,\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\cdot T\mathfrak{v} + (\mathfrak{D}\,,\nabla_{\mathfrak{D}})\,\mathfrak{r}\cdot T\,\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} \\ &\quad - (\mathfrak{D}\,,\nabla_{\mathfrak{D}})\,\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}\cdot T\mathfrak{r} - (\mathfrak{D}\,,\nabla_{\mathfrak{D}})\,\mathfrak{v}\cdot T\,\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\,. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von (17) erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= (\mathfrak{D}\,,\nabla_{\mathfrak{D}})\,\frac{\mu\,\mathfrak{r}}{r^3}\cdot T\mathfrak{r} - (\mathfrak{D}\,,\nabla_{\mathfrak{D}})\,\mathfrak{r}\cdot T\,\frac{\mathfrak{r}}{r^3} \\ &= \left[\frac{\mu}{r^3}(\mathfrak{D}\,,\nabla_{\mathfrak{D}})\,\mathfrak{r} - \frac{3\,\mu\,\mathfrak{r}}{r^3}(\mathfrak{D},\nabla_{\mathfrak{D}})\,r\right]\cdot T\mathfrak{r} \\ &\quad - \left[\frac{\mu}{r^3}\,T\mathfrak{r} - \frac{3\,\mu\,\mathfrak{r}}{r^3}\,Tr\right](\mathfrak{D}\,,\nabla_{\mathfrak{D}})\,\mathfrak{r} \\ &= \frac{3\,\mu}{r^3}\,[Tr\cdot\mathfrak{r}\cdot(\mathfrak{D}\,,\nabla_{\mathfrak{D}})\,\mathfrak{r} \\ &\quad - (\mathfrak{D}\,,\nabla_{\mathfrak{D}})\,r\cdot\mathfrak{r}\cdot T\mathfrak{r}]\,. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}\cdot(\mathfrak{D}\,,\nabla_{\mathfrak{D}})\,\mathfrak{r} &= r\cdot(\mathfrak{D}\,,\nabla_{\mathfrak{D}})\,r\,, \\ \mathfrak{r}\cdot T\mathfrak{r} &= r\cdot Tr \end{aligned} \tag{20}$$

erhält man

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0\,,$$

d. h. daß die Zeit im Ausdruck P nicht erscheint, sondern P Funktion nur von $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ und τ sein kann. Daher können wir, um P als eine Funktion der Oskulationselemente zu berechnen, $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{v}$ für einen beliebigen Zeitmoment nehmen. Wir setzen

$$t = \tau\,.$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} &w = 0\,,\quad \mathfrak{r} = M\mathfrak{D}\,,\quad \mathfrak{v} = N[\mathfrak{C}\,,\mathfrak{D}]\,, \\ &M = \frac{C^2}{D\,(\mu + D)}\,,\quad N = \frac{\mu + D}{C^2 D}\,. \end{aligned} \tag{21}$$

Unter Berücksichtigung der Formeln (2) bis (7), (19′) und der Gln.:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d\mathfrak{C}}{dt}\,,\mathfrak{C}_0\right) = \frac{dC}{dt}\,,\quad \left(\frac{d\mathfrak{D}}{dt}\,,\mathfrak{D}_0\right) = \frac{dD}{dt}\,, \\ &(\mathfrak{D}\,,\mathfrak{C}\,,\mathfrak{D}) = \left(\mathfrak{D}\,,\frac{d\mathfrak{C}}{dt}\,,\mathfrak{D}\right) = 0\,, \\ &\left(\frac{d\mathfrak{D}}{dt}\,,\mathfrak{C}\,,\mathfrak{D}\right) = -\left(\mathfrak{D}\,,\mathfrak{C}\,,\frac{d\mathfrak{D}}{dt}\right) \end{aligned}$$

bekommt man nach der Transformation:

$$P = \left[D\,\frac{\partial\,(MN)}{\partial D} + 2\,MN\right]\left(\mathfrak{D}\,,\mathfrak{C}\,,\frac{d\mathfrak{D}}{dt}\right)$$

wegen

$$MN = D^{-2}$$

und wegen der Gleichung

$$D\frac{d(MN)}{dD} + 2MN = 0$$

einfach

$$P = 0 .$$

Für Q haben wir

$$Q = \frac{\mu}{r^2}(\mathfrak{D}, \nabla_{\mathfrak{D}})\, r + (\mathfrak{D}, \nabla_{\mathfrak{D}})\frac{v^2}{2}$$
$$= (\mathfrak{D}, \nabla_{\mathfrak{D}})\left(\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}\right),$$

was in der Verbindung mit dem Integral der lebendigen Kraft liefert:

$$Q = (\mathfrak{D}, \nabla_{\mathfrak{D}})\frac{D^2 - \mu^2}{2C^2} = \frac{D^2}{C^2}.$$

Endlich erhalten wir aus (19)

$$\frac{D^2}{C^2}\cdot\frac{d\tau}{dt} = (\mathfrak{D}, \operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} R). \tag{22}$$

Dies ist die dritte Gleichung von Milankowitsch.

Nun multiplizieren wir beide Seiten von (16) vektoriell mit $\mathfrak{r}$; mit Rücksicht auf (8) folgt:

$$\frac{d\mathfrak{C}}{dt} = [\mathfrak{r}, \operatorname{grad} R]. \tag{23}$$

Differenzieren wir (10) nach t, so erhält man:

$$\left[\frac{d\mathfrak{C}}{dt}, \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right] + \left[\mathfrak{C}, \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right] + \mu\frac{d\mathfrak{r}_0}{dt} + \frac{d\mathfrak{D}}{dt} = 0. \tag{24}$$

Man kann aber leicht aus (8) folgern:

$$\frac{d\mathfrak{r}_0}{dt} = \left[\mathfrak{C}, \frac{\mathfrak{r}}{r^3}\right]$$

und

$$\left[\frac{d\mathfrak{C}}{dt}, \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right] + \left[\mathfrak{C}, \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{\mu\,\mathfrak{r}}{r^3}\right] + \frac{d\mathfrak{D}}{dt} = 0.$$

Schließlich wird, mit Rücksicht auf (16),

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \left[\frac{d\mathfrak{r}}{dt}, \frac{d\mathfrak{C}}{dt}\right] + [\operatorname{grad} R, \mathfrak{C}]. \tag{25}$$

Setzen wir in (23) den Wert von $\mathfrak{r}$ aus (14) ein, dann bekommt man mit Rücksicht auf die Formel

$$[\mathfrak{A}, [\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]]\,\mathfrak{A} = \mathfrak{B}(\mathfrak{A}, \mathfrak{C}) - \mathfrak{C}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$$

die Beziehung

$$\frac{d\mathfrak{C}}{dt} = \{\mathfrak{D}_0(\mathfrak{C}_0, \operatorname{grad} R) - \mathfrak{C}_0(\mathfrak{D}_0, \operatorname{grad} R)\}\, r\sin w$$
$$+ [\mathfrak{D}_0, \operatorname{grad} R]\, r\cos w.$$

Mit Rücksicht auf dieselbe Vektorformel ist

$$[\mathfrak{C}_0, [\mathfrak{D}_0, \operatorname{grad} R]] = \mathfrak{D}_0(\mathfrak{C}_0, \operatorname{grad} R),$$
$$[\mathfrak{D}_0, [\operatorname{grad} R, \mathfrak{C}_0]] = -\mathfrak{C}_0(\mathfrak{D}_0, \operatorname{grad} R)$$

und folglich

$$\frac{d\mathfrak{C}}{dt} = [\mathfrak{C}_0, [\mathfrak{D}_0, \operatorname{grad} R]]\, r\sin w$$
$$+ [\mathfrak{D}_0, \operatorname{grad} R]\, r\cos w + [\mathfrak{D}_0, [\operatorname{grad} R, \mathfrak{C}_0]]\, r\sin w$$
$$= \left[\mathfrak{C}, \frac{r\sin w}{C}[\mathfrak{D}_0, \operatorname{grad} R]\right] \tag{26}$$
$$+ \left[\mathfrak{D}, \frac{r\cos w}{D}\operatorname{grad} R + \frac{r\sin w}{D}[\operatorname{grad} R, \mathfrak{C}_0]\right].$$

Dabei ist

$$(\mathfrak{r}, \operatorname{grad} R) = (\mathfrak{D}_0, \operatorname{grad} R)\, r\cos w$$
$$+ (\mathfrak{C}, [\mathfrak{D}_0, \operatorname{grad} R])\frac{r\sin w}{C}$$

und

$$(\mathfrak{r}, \operatorname{grad} R) = (\mathfrak{D}, \operatorname{grad} R)\frac{r\cos w}{D}$$
$$+ (\mathfrak{D}, [\operatorname{grad} R, \mathfrak{C}_0])\frac{r\sin w}{D}.$$

Aus den Formeln (2) bis (7) geht hervor, daß

$$[\mathfrak{C}, \operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} R] = [\mathfrak{C}, \nabla_{\mathfrak{C}}]\,(\mathfrak{r}, \operatorname{grad} R)_{\mathfrak{r}}$$
$$= \frac{r\sin w}{C}[\mathfrak{C}, \nabla_{\mathfrak{C}}]\,(\mathfrak{C}, \mathfrak{D}_0, \operatorname{grad} R)_{\mathfrak{C}}$$
$$= \left[\mathfrak{C}, \frac{r\sin w}{C}[\mathfrak{D}_0, \operatorname{grad} R]\right]$$

$$[\mathfrak{D}, \operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} R] = [\mathfrak{D}, \nabla_{\mathfrak{D}}]\,(\mathfrak{r}, \operatorname{grad} R)_{\mathfrak{r}}$$
$$= \frac{r\cos w}{D}[\mathfrak{D}, \nabla_{\mathfrak{D}}]\,(\mathfrak{D}, \operatorname{grad} R)_{\mathfrak{D}}$$
$$+ \frac{r\sin w}{D}[\mathfrak{D}, \nabla_{\mathfrak{D}}]\,(\mathfrak{D}, \operatorname{grad} R, \mathfrak{C}_0)_{\mathfrak{D}}$$
$$= \left[\mathfrak{D}, \frac{r\cos w}{D}\operatorname{grad} R\right.$$
$$\left. + \frac{r\sin w}{D}[\operatorname{grad} R, \mathfrak{C}_0]\right],$$

und aus (26) endlich, daß

$$\frac{d\mathfrak{C}}{dt} = [\mathfrak{C}, \operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} R] + [\mathfrak{D}, \operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} R]. \tag{27}$$

Dies ist die erste Gleichung von Milankowitsch.

Aus (23) folgt weiter, daß

$$\left(\mathfrak{C}, \frac{d\mathfrak{C}}{dt}\right) = (\operatorname{grad} R, \mathfrak{C}, \mathfrak{r}), \tag{28}$$

aus (25), daß

$$\left(\mathfrak{D}, \frac{d\mathfrak{D}}{dt}\right) = \left(\frac{d\mathfrak{C}}{dt}, \mathfrak{D}, \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right) + (\operatorname{grad} R, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}), \tag{29}$$

und aus (9), daß

$$\left[\mathfrak{D}, \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right] = \frac{1}{C^2}[\mathfrak{D}, [\mathfrak{C}, \mathfrak{D} + \mu\,\mathfrak{r}_0]]$$
$$= \frac{1}{C^2}[\mathfrak{C}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D} + \mu\,\mathfrak{r}_0) - (\mathfrak{D} + \mu\,\mathfrak{r}_0)(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})].$$

Mit Rücksicht auf die Gln.

$$(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}) = D^2, \quad (\mathfrak{D}, \mathfrak{r}_0) = D\cos w, \quad (\mathfrak{C}, \mathfrak{D}) = 0,$$
$$\frac{D\cos w}{C^2} = \frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2}$$

wird

$$\left[\mathfrak{D}, \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right] = \left(\frac{D^2 - \mu^2}{C^2} + \frac{\mu}{C}\right)\mathfrak{C};$$

aus (29) folgt weiter nach dem Einsetzen des Wertes von

$$\left[\mathfrak{D}, \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right],$$

daß

$$\left(\mathfrak{D}, \frac{d\mathfrak{D}}{dt}\right) = \left(\frac{D^2 - \mu^2}{C^2} + \frac{\mu}{r}\right)\left(\mathfrak{C}, \frac{d\mathfrak{C}}{dt}\right) + (\operatorname{grad} R, [\mathfrak{C}, \mathfrak{D}]),$$

und daraus im Zusammenhang mit (28) und (9):

$$\frac{\mu^2 - D^2}{C^2}\left(\mathfrak{C}, \frac{d\mathfrak{C}}{dt}\right) + \left(\mathfrak{D}, \frac{d\mathfrak{D}}{dt}\right)$$
$$= \frac{\mu}{r}\left(\mathfrak{C}, \frac{d\mathfrak{C}}{dt}\right) + (\operatorname{grad} R, [\mathfrak{C}, \mathfrak{D}])$$
$$= \frac{\mu}{r}(\operatorname{grad} R, \mathfrak{C}, \mathfrak{r}) + (\operatorname{grad} R, \mathfrak{C}, \mathfrak{D})$$
$$= (\operatorname{grad} R, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} + \mu\,\mathfrak{r}_0)$$
$$= C^2\left(\operatorname{grad} R, \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right).$$

Weil aber

$$\left(\operatorname{grad} R, \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right) = -\left(\operatorname{grad} R, \frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial\tau}\right) = -\frac{\partial R}{\partial\tau}, \tag{30}$$

haben wir

$$\frac{\mu^2 - D^2}{C^2}\left(\mathfrak{C}, \frac{d\mathfrak{C}}{dt}\right) + \left(\mathfrak{D}, \frac{d\mathfrak{D}}{dt}\right) + C^2\frac{\partial R}{\partial\tau} = 0. \tag{31}$$

Multiplizieren wir beide Seiten der ersten Oskulationsbedingung (18) skalar mit $\operatorname{grad} R$, so erhält man mit Rücksicht auf (30)

$$\left(\frac{d\mathfrak{C}}{dt}, \operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} R\right) + \left(\frac{d\mathfrak{D}}{dt}, \operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} R\right) + \frac{\partial R}{\partial\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt} = 0. \tag{32}$$

Die Gln. (31) und (32) wurden auch von Milankowitsch abgeleitet, aber auf andere Weise. Eliminieren wir $\frac{d\mathfrak{C}}{dt}$ und $\frac{d\tau}{dt}$ aus (32) mit Hilfe von (22), (24) und (30), so folgt:

$$\left(\frac{d\mathfrak{D}}{dt} - [\mathfrak{D}, \operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} R] + \frac{C^2}{D^2}\cdot\frac{\partial R}{\partial\tau}\mathfrak{D}, \operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} R\right) = 0.$$

Daraus sieht man, daß der erste Faktor als vektorielles Produkt eines Vektors $\mathfrak{g}$ mit dem $\operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} R$ dargestellt werden kann:

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} - [\mathfrak{D}, \operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} R] + \frac{C^2}{D^2}\cdot\frac{\partial R}{\partial\tau}\mathfrak{D} = [\mathfrak{g}, \operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} R]. \tag{33}$$

Aus (1) und (27) folgt ferner, daß

$$\left(\mathfrak{C}, \frac{d\mathfrak{D}}{dt}\right) = -\left(\mathfrak{D}, \frac{d\mathfrak{C}}{dt}\right) = (\mathfrak{C}, [\mathfrak{D}, \operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} R]),$$

und aus (33), daß

$$\left(\mathfrak{C}, \frac{d\mathfrak{D}}{dt}\right) = (\mathfrak{C}, [\mathfrak{D}, \operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} R]) + (\mathfrak{C}, [\mathfrak{g}, \operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} R]).$$

Also ist

$$(\mathfrak{C}, [\mathfrak{g}, \operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} R]) = 0.$$

Aus der letzten Gleichung sieht man, daß $\mathfrak{g}$ in der Ebene der Vektoren $\mathfrak{C}$ und $\operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} R$ liegt. Da $\mathfrak{g}$ nur im Produkt $[\mathfrak{g}, \operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} R]$ erscheint, kann man annehmen, daß

$$\mathfrak{g} = p\,\mathfrak{C}$$

ist, wobei p einen Skalar bedeutet, d. h.

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = [\mathfrak{D}, \operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} R] + p[\mathfrak{C}, \operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} R] - \frac{C^2}{D^2}\frac{\partial R}{\partial\tau}D. \tag{34}$$

Durch die Elimination von $\frac{d\mathfrak{D}}{dt}$ und $\frac{d\mathfrak{C}}{dt}$ mit Hilfe von (27) und (34) erhält man

$$\left(\frac{\mu^2 - \mathfrak{D}^2}{C^2} - p\right)(\mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} R) = 0$$

und

$$p = \frac{\mu^2 - D^2}{C^2}.$$

Daraus folgt endlich

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = [\mathfrak{D}, \operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} R] + \frac{\mu^2 - D^2}{C^2}[\mathfrak{C}, \operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} R] - \frac{C^2}{D^2}\frac{\partial R}{\partial\tau}\mathfrak{D}. \tag{35}$$

Das ist die zweite Gleichung von Milankowitsch.